2012 問4.

$X \sim N(\mu, 1)$,

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$.

[1]

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim N(0,1)$$

$P\left(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.95$ なので

$$\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow -\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

[2] $\hat{\mu}^{MLE} = \bar{x} \; (= \mu_1)$ である.

$R = \{x \mid L(\mu_1) > k L(\mu_0)\}$.

$L(\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\mu)^2\right\}$.

$\quad = \square \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum x_i^2 - 2\mu n\bar{x} + n\mu^2\right)\right\}$.

$\frac{L(\mu_1)}{L(0)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(-n\bar{x}^2\right)\right\} = \exp\left(\frac{n\bar{x}^2}{2}\right) > 0$ であり.

棄却域は $\exp\frac{n\bar{x}^2}{2} > C \; (C>0)$ となる。

$P\left(\exp\frac{n\bar{x}^2}{2} > C\right) = \alpha$ となるようなCをとった際,

$R = \{x \mid \exp\frac{n\bar{x}^2}{2} > C\}$ の検定はUMPである。(定理).

また, $Y_1, Y_2, \dots \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

$H_0: \mu = \mu_0$, vs $H_1: \mu \neq \mu_0$ なる両側検定において,

$R = \left\{y \mid \sqrt{n}\frac{|\bar{y}-\mu_0|}{\sigma_0} > z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$ は, UMPU である(定理). 本問におけるUMPUは, $\rightarrow R = \{\sqrt{n}|\bar{x}| > z_{\frac{\alpha}{2}}\}$.

※ UMP, UMPU やネイマン ピアソンの補題については,
『現代数理統計学』竹村彰通 を参照

[3]「[2]の H_0 を棄却しない」⇔「$\bar{x}$ が棄却域Rに入らない」

$\Leftrightarrow \sqrt{n}|\bar{x}| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$

$\quad -\frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{x} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$

「$\mu = 0$ が[1]の信頼区間に入る」

$\Leftrightarrow \bar{x} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < 0 < \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$ 　同値.